10-11-16

• **Γραμμικές Διοφαντικές Εξισώσεις**

Πολυώνυμα πολλών μεταβλητών

πχ: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=4\cdot x_1^3\cdot x_2^5+3\cdot x_1x_2x_3^2x_4^3+5$

• **Ορισμός**: Μια Διοφαντική Εξίσωση είναι μια εξίσωση της μορφής:

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ (*), όπου το $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ είναι πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές

Μια ακέραια λύση της (*) είναι μια n-άδα ακεραίων $(z_1,z_2,\dots,z_n)$: $f(z_1,z_2,\dots,z_n)=0$

Η Διοφαντική Ανάλυση ασχολείται με την περιγραφή του συνόλου λύσεων Διοφαντικών Εξισώσεων.

• $f(x,y,z)=x+y-z \mapsto x+y-z=0 \Rightarrow x+y=z$

$\{(s,t,s+t) \mid s,t\in\mathbb{Z}\}$

• $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2 \mapsto x^2+y^2-z^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=z^2$

$$\left\{\left(st,\ \frac{s^2-t^2}{2},\ \frac{s^2+t^2}{2}\right) \,\middle|\, s,t\in\mathbb{Z}\right\}$$

• $f(x,y,z)=x^3+y^3-z^3 \mapsto x^3+y^3-z^3=0 \Rightarrow x^3+y^3=z^3$

* • $f(x,y,z) = x^n + y^n - z^n \mapsto x^n + y^n - z^n = 0$, τότε για $n \geq 3$ το σύνολο λύσεων της $f(x,y,z) = 0$ στο $\mathbb{N}$ είναι το $\emptyset$

* {Θεώρημα Wiles-Taylor ως απάντηση στην Εικασία του Fermat ~ 1994}

Παράδειγμα: $f(x,y) = 2x^3 + xy - 7 \mapsto$

$2x^3 + xy - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + xy = 7$ (*)

Έστω (x,y): ακέραια λύση της (*)

$2x^3 + xy = 7 \Rightarrow x(2x^2 + xy) = 7 \Longrightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x \mid 7 \\ 7: \text{πρώτος}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = \pm 1$ ή $x = \pm 7$

• $x = 1 \Rightarrow 2x^2 + y = 7 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 + y = 7 \Rightarrow y = 5$

$(x,y) = (1,5)$

• $x = -1 \Rightarrow 2x^2 + y = -7 \Rightarrow 2 + y = -7 \Rightarrow y = -9$

$(x,y) = (-1,-9)$

• $x = 7 \Rightarrow 2 \cdot x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 \cdot 7^2 = 1 - 2 \cdot 49 = -97$

$(x,y) = (7,-97)$

• $x = -7 \Rightarrow 2 \cdot x^2 + y = -1 \Rightarrow y = -1 - 2 \cdot 7^2 = -99$

$(x,y) = (-7,-99)$

Άρα, αν (x,y): ακέραια λύση της (*) τότε:

(x,y) είναι: $\begin{Bmatrix} (1,5), (-1,-9) \\ (7,-97), (-7,-99) \end{Bmatrix}$

↳ Αν (x,y): ρητή λύση της (*) $\Rightarrow 2x^3+xy=7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^3-7=-xy \Rightarrow y=\frac{2x^3-7}{x}$

Άρα, το σύνολο των ρητών λύσεων της (*) είναι

το $\left\{\left(x, \frac{-2x^3+7}{x}\right) \middle| \; x\in \mathbb{Q}\setminus\{0\}\right\}$

↳ Θα ασχοληθούμε με πολυώνυμα της εξής μορφής:

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n-c$, $a_1,\dots,a_n,c\in\mathbb{Z}$

Η αντίστοιχη διοφαντική εξίσωση θα είναι της μορφής

$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=c$

↳ Θα αναπτύξουμε τη θεωρία κυρίως για $n=2$

Συνεπώς, η παραπάνω εξίσωση θα γράφεται

$ax+by=c$

Θεώρημα: Έστω η Διοφαντική Εξίσωση

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ⊛

Η ⊛ έχει τουλάχιστον μια ακέραια λύση $\Leftrightarrow$

$d = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid b$

Απόδειξη: Θέτουμε $d = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow$

$\exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z} : d = c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_n$ ①

Επίσης, $d \mid a_i$, $1 \le i \le n \Rightarrow \exists\, z_i$, $1 \le i \le n : a_i = z_i \cdot d$ ②

"$\Rightarrow$" Έστω ότι $(x_1, \dots, x_n)$: ακέραια λύση της ⊛

$\Rightarrow a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \xRightarrow{②}$

$\Rightarrow d \cdot z_1 \cdot x_1 + \dots + d \cdot z_n x_n = b \Rightarrow$

$\Rightarrow d(z_1x_1 + \dots + z_nx_n) = b \Rightarrow d \mid b$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $d \mid b \Rightarrow \exists\, d' \in \mathbb{Z} : b = d \cdot d'$

Πολ/ντας την ① με το d' θα έχουμε:

$b = d \cdot d' = a_1(c_1d') + \dots + a_n(c_nd')$

Η n-άδα $(c_1d', \dots, c_nd')$: ακέραια λύση της ⊛

<u>Παράδειγμα</u>: Η $6x+8y+10z=1$ δεν έχει ακέραιες λύσεις διότι, $(6,8,10)=2 \nmid 1$

Αν, $6x+8y+10z=4$, $(6,8,10)=2|4$, υπάρχουν ακέραιες λύσεις

<u>Θεώρημα</u>: Έστω η διοφαντική εξίσωση: $ax+by=c$ ⊛

Η ⊛ έχει τουλάχιστον μία ακέραια λύση $\Leftrightarrow$

$d=(a,b)|c$. Αν (x_0,y_0) είναι μια ακέραια λύση τότε: όλες οι ακέραιες λύσεις της ⊛, δίνονται απ' τους εξής τύπους:

1) $X=x_0+\frac{b}{d}t$, $Y=y_0-\frac{a}{d}t$, $t\in\mathbb{Z}$ (+)

<u>Απόδειξη</u>: Η (*) έχει ακέραιες λύσεις $\Leftrightarrow$

$d=(a,b)|c$, απ' το προηγούμενο θεώρημα

Έστω (x_0,y_0) ακέραια λύση της ⊛

Άρα, $ax_0+by_0=c$ (1)

$$a\cdot\left(x_0+\frac{b}{d}t\right)+b\left(y_0-\frac{a}{d}t\right)=$$

$$=ax_0+\frac{a\cdot b}{d}t+by_0-\frac{ab}{d}t=$$

$$=ax_0+by_0 \overset{(1)}{=} c$$

Παράδειγμα: Η $6x+8y+10z=1$ δεν έχει ακέραιες λύσεις διότι, $(6,8,10)=2\nmid 1$

Αν, $6x+8y+10z=4$, $(6,8,10)=2|4$, υπάρχουν ακέραιες λύσεις

Θεώρημα: Έστω η διοφαντική εξίσωση: $ax+by=c$ ⊛

Η ⊛ έχει τουλάχιστον μια ακέραια λύση $\Leftrightarrow$

$d=(a,b)|c$. Αν (x_0,y_0) είναι μια ακέραια λύση τότε: όλες οι ακέραιες λύσεις της ⊛, δίνονται απ' τους εξής τύπους:

1) $X=x_0+\frac{b}{d}t$, $Y=y_0-\frac{a}{d}t$, $t\in\mathbb{Z}$ (+)

Απόδειξη: Η (⊛) έχει ακέραιες λύσεις $\Leftrightarrow$

$d=(a,b)|c$, απ' το προηγούμενο θεώρημα

Έστω (x_0,y_0) ακέραια λύση της ⊛

Άρα, $ax_0+by_0=c$ (1)

$$a\cdot\left(x_0+\frac{b}{d}t\right)+b\left(y_0-\frac{a}{d}t\right)=$$

$$=ax_0+\frac{a\cdot b}{d}t+by_0-\frac{ab}{d}t=$$

$$=ax_0+by_0\overset{(1)}{=}c$$

Στην ⊛ υποθέτουμε ότι: $d=(\alpha,b)|c$

Τότε: $d=\alpha \cdot x_0'' + b y_0''$, όπου $x_0'', y_0'' \in \mathbb{Z}$ ①

$d|c \Rightarrow c = d \cdot d'$, $d' \in \mathbb{Z}$ ②

$$\Rightarrow c = d \cdot d' = \alpha \underbrace{x_0'' \cdot d'}_{x_0'} + b \cdot \underbrace{y_0'' d'}_{y_0'}$$

Άρα, $\left.\begin{array}{l} x_0' = x_0'' \cdot d' \\ y_0' = y_0'' \cdot d' \end{array}\right\} \Rightarrow$ ακέραια λύση της ⊛

↳ Βήματα Επίλυσης Διοφαντικής Εξίσωσης (*)

1) Υπολογισμός ΜΚΔ $d=(\alpha,b)$

2) i) Αν $d \nmid c \Rightarrow$ η (*) δεν έχει ακέραιες λύσεις

ii) Αν $d|c \Rightarrow \exists\, d' \in \mathbb{Z} : c = d \cdot d'$

3) Από τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο βρίσκουμε $x_0'', y_0'' \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε: $d = \alpha x_0'' + b y_0''$

4) Το ζεύγος $x_0 = x_0'' \cdot d'$, $y_0 = y_0'' \cdot d'$ είναι μια ακέραια λύση της (*)

5) Όλες οι ακέραιες λύσεις είναι:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} t, \quad y = y_0 - \frac{\alpha}{d} t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

· <u>Ορισμός</u>: Μια ακέραια λύση (x,y) της (*) καλείται θετική αν-ν $x>0$ και $y>0$

<u>Παράδειγμα</u>: $172x+20y=1000$ (*)

Λύση: $d=(172,20)=4$, διότι:

$172=8\cdot 20+12$

$20=1\cdot 12+8$

$12=1\cdot 8+\boxed{4} \longrightarrow d=4$

$8=2\cdot 4+0$

$d=4 \mid 1000$, άρα η (*) έχει ακέραιες λύσεις

$4=12-8=12-(20-12)=-20+2\cdot 12=$

$=-20+2\cdot(172-8\cdot 20)=2\cdot 172-17\cdot 20=$

Άρα, $172\cdot 2+20\cdot(-17)=4 \Rightarrow 172\cdot 2\cdot 250+20\cdot(-17)\cdot 250$

$=4\cdot 250 \Rightarrow 172\cdot 500+20\cdot(-4\cdot 250)=1000$

$\begin{cases} x_0=500 \\ y_0=-4.250 \end{cases} \Rightarrow$ Ακέραια λύση της (*)

$X=500+\frac{20}{4}t=500+5t$

$Y=-4.250-\frac{172}{4}t=-4250-43t$, $t\in Z$

↳ Για τις θετικές ακέραιες λύσεις:

Θέτουμε $x>0$ και $y>0$

$x>0 \Rightarrow 500t + 5t > 0 \Rightarrow t > -100$

$y>0 \Rightarrow -4.250 - 43t > 0 \Rightarrow t < -98.65$

$\Bigg\} \Rightarrow t = -99$

Άρα, η μοναδική θετική ακέραια λύση είναι:

$X = 500 - 5 \cdot 99 = 5$, $Y = -4.250 + 43 \cdot 99 = 7$